تطابق تورهای اویلری و دورهای همیلتونی :

تعریف: یک گشت $w = e_1 e_2 \dots e_n$ که $e_i \neq e_j$ $(i \neq j)$ را یک گذرگاه (trail) گوییم. یال تکراری نداریم ولی ممکن است رأس تکراری داشته باشیم.

گذرگاهی که از هر یال گراف G دقیقاً یکبار عبور کند، گذرگاه اویلری نام دارد.

یک گذرگاه اویلری بسته را تور اویلری گوییم.

گراف را اویلری گوییم هرگاه شامل یک تور اویلری باشد.

قضیه: گراف همبند G اویلری است اگر و تنها اگر هر رأس آن از درجه‌ی زوج باشد.

برهان: فرض کنید $w: u \to u$ یک تور اویلری باشد، اگر v یک رأس میانی w

SEVAN

باشد، v، k بار در w ظاهر شده باشد (به عنوان رأس میانی)، آن گاه v در 2k

یال وجود دارد و هر یال یک درجه برای v می‌سازد، لذا اگر $u \neq v$، داریم $deg(v)=2k$

و اگر $v=u$، آن گاه $deg(v)=2k+2$، در هر حال درجه‌ی v زوج است.

برعکس، فرض کنید درجه‌ی هر رأس گراف همبند G زوج باشد. فرض کنید $w=e_1e_2 \dots e_n$

و $e_i=u_{i-1}u_i$، یعنی $w: u_0 \to u_n$، بزرگ‌ترین گذرگاه G باشد.

$u_0 — u_1 — u_2 — \dots — u_{n-1} — u_n$

چون w بزرگ‌ترین گذرگاه G است، اگر $w \in N_G(u_n)$ آن گاه برای یک $i=0,\dots,n-1$

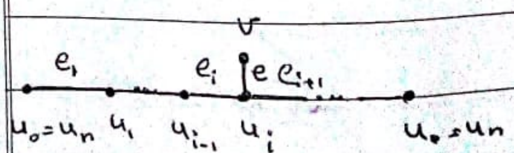
داریم $w=u_i$. به عبارت بهتر اگر یالی مانند $e \in G$ باشد که یک سر آن u_n باشد،

آن گاه e در w ظاهر شده است. بنابراین اگر $u_0 \neq u_n$ داریم $deg(u_n)=2k+1$ که

u_n، k بار به عنوان رأس میانی در w ظاهر شده است که تناقض است بنابراین $u_n=u_0$.

اگر w تور اویلری نباشد، چون G همبند است، یال $e=u_iv \in E(G)$ هست به طوری که

e یالی در w نیست. $i=1,\dots,n-1$، حال



Date: ۹۷ / ۸ / ۵ Subject:

حال لنطاه زیر را در G داریم :

$w_1: e_{i+1} e_{i+2} \dots e_n e_1 \dots e_i e$

اما طول w_1 از w بیش‌تر است و تناقض است.

قضیه: یک گراف همبند، گشت اویلری دارد هرگاه حداکثر ۲ رأس از درجه‌ی فرد داشته باشد و برعکس.

برهان: فرض کنید G یک گشت اویلری مانند $w: v_0 \longrightarrow v_n$ داشته باشد.

استدلال مشابه قضیه‌ی قبل، همه‌ی رئوس میانی w درجه‌ی زوج دارند. به علاوه اگر v_n، k بار به عنوان رأس میانی ظاهر شده باشد، درجه‌ی آن $2k+1$ است. مشابهاً

درجه‌ی v_0 فرد است و حکم ثابت است.

برعکس: اگر درجه‌ی هر رأس زوج باشد با مطالب قبل گراف اویلری است و حکم ثابت است.

پس فرض کنید یک رأس از درجه فرد داشته باشد. با مطالب قبل و فرض قضیه، G دارای

دقیقاً دو رأس از درجه‌ی فرد است. فرض کنید این ۲ رأس u و v باشند. گراف جدید

H را می‌سازیم. $V(H) = V(G) \cup \{w\}$ و $w \notin V(G)$. $E(H) = E(G) \cup \{uw, vw\}$

SEVAN

در گراف H درجه‌ی هر رأس زوج است لذا با مطالب قبل دارای یک تور اویلری است.

فرض کنید $W: u \to v \to w \to u$ تور اویلری H باشد. با حذف w یک گشت اویلری

برای G حاصل می‌شود. از روی کتاب بخون!

الگوریتم فلوری: اگر G اویلری باشد، الگوریتمی بنویسید که یک تور اویلری در G پیدا کند.

گراف همیلتونی:

یک مسیر را در گراف G همیلتونی گوییم هرگاه از همه‌ی رئوس G حتماً بگذرد.

مشابهاً یک دور همیلتونی را می‌توان تعریف کرد؛ یعنی یک دور همیلتونی در G دوری است که

از همه‌ی رئوس G بگذرد.

G را همیلتونی گوییم هرگاه شامل یک دور همیلتونی باشد.

مثال: $G=K_n$ $n\geq 3$

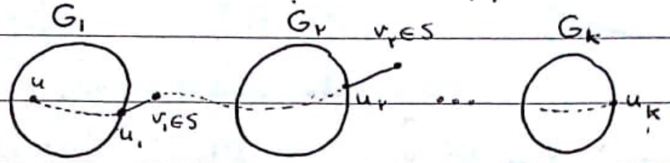
تذکر: گراف همیلتونی حتماً همبند است.

لم: فرض کنید G همیلتونی باشد، برای هر مجموعه‌ی ناتهی $S\subseteq V(G)$ داریم $c(G-S)\leq |S|$

فرض کنید $\emptyset \neq S \subseteq V(G)$ و C یک دور همیلتونی در G باشد. قرار دهید $c(G-S)=k$.

اگر $k=1$ با توجه به این که $S \neq \emptyset$ پس $|S| \geq 1$ و حکم ثابت است. پس فرض کنید

$k \geq 2$. فرض کنید G_1 تا G_k مؤلفه‌های همبندی $G-S$ باشند.



فرض کنید $C: u \to u$ و $u \in G_1$. با حرکت روی C فرض کنید u_i آخرین رأسی

باشد که $u_i \in C$ و $u_i \sim v_i$ و $v_i \in V(C)$ و $v_i \notin G_i$. در این صورت $v_i \in S$

(هیچ کدام از v_i ها با هم برابر نیستند چون داریم روی یک دور حرکت می‌کنیم) بنابراین $|S| \geq k$

قضیه: فرض کنید $|V(G)| \geq 3$ و $u,v \in V(G)$ و G همبند است به طوری که

$d_G(u)+d_G(v) \geq |V(G)|$ آن گاه G همیلتونی است اگر و تنها اگر $G+uv$ همیلتونی باشد.

برهان: اگر G همیلتونی باشد واضح است که $G+uv$ نیز همیلتونی است.

قرار دهید $e=uv$ اگر $e \in E(G)$ که حکم ثابت است.

فرض کنید $e \notin E(G)$ و C یک دور همیلتونی در $G+e$ باشد. اگر $e \notin E(C)$ که C یک دو-

Date: ۹۷/۸/۷ Subject:

همیلتونی در G است و حکم ثابت است. پس فرض کنید $e\in E(C)$. $C: u * v \; e \; u$

فرض کنید $|V(G)|=n$ و $V(G)=\{u=v_1,v_2,\dots,v_n=v\}$.

$C:\; u=v_1 — v_2 — v_3 — \dots — v_{i-1} — v_i — \dots — v_{n-1} — v_n=v — u=v_1$

چون $\overset{*}{d_G(u)+d_G(v)\geq |V(G)|}$ لذا $\exists i \;\; s.t. \;\; v\sim v_{i-1}$ و $u\sim v_i$

آن v_iهایی که با v مجاور نیستند می‌شود $d_G(u)+1$ (چون فرض می‌کنیم اتفاق بالا نیفتد؛ یعنی

اگر v_iای وجود داشته باشد که با u مجاور باشد، v_{i-1} با v مجاور نیست پس آن v_iهایی که

با v مجاور نیستند می‌شود $d_G(u)$ و یکی هم خود u، پس $d_G(u)+1$). از طرفی آن v_iهایی که

با v مجاورند می‌شود $d_G(v)$ پس $d_G(v)+d_G(u)+1\leq n$ که با * متناقض است.

بستار یک گراف:

فرض کنید G یک گراف هم‌بند باشد. قرار دهید $G_0=G$. فرض کنید $u,v\in V(G)$ به طوری که

$u \underset{G}{\not\sim} v \qquad d_G(v)+d_G(u)\geq |V(G)|$

در این صورت قرار دهید $G_1=G_0+uv$.

مسئله‌ها: $G_1, G_2, \ldots$ را می‌سازیم. گراف نهایی حاصل شده را بستار G می‌نامیم و با نماد $cl(G)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین اگر $u,v \in V(cl(G))$ یکی از دو حالت زیر رخ داده است:

$u \sim v$

یا

$d(u)+d(v) < |V(G)|$

$cl(G) \quad cl(G)$

قضیه: $cl(G)$ منحصربه‌فرد است.

برهان: فرض کنید $H = G+\{e_1,\ldots,e_r\}$ و $K = G+\{f_1,\ldots,f_s\}$ دو بستار متمایز باشند.

داریم $H_0 = G_0 = K_0$

$H_1 = G+e_1, \ldots, H_i = H_{i-1}+e_i$

می‌خواهیم نشان دهیم $\{e_i\}$ همگی داخل مجموعه $\{f_i\}$ هستند، فرض کنیم نباشند.

فرض کنید k، اولین اندیسی باشد که $e_k \notin \{f_1,\ldots,f_s\}$. فرض کنید $e_k = uv$،

$H_{k-1} = G+\{e_1,\ldots,e_{k-1}\}$ ، $d_{H_{k-1}}(u) + d_{H_{k-1}}(v) \geq |V(G)|$.

با انتخاب k داریم: $H_{k-1} \subseteq K$ ، $d_K(u)+d_K(v) \geq d_{H_{k-1}}(u)+d_{H_{k-1}}(v) \geq |V(G)|$

و $e_k \notin E(K)$ که تناقض با بستار بودن K است.

Date: ۹۷ / ۸ / ۱۲ Subject:

تمرین: فرض کنید G همبند و $|V(G)| \geq 3$:

۱) G همیلتونی است $\Longleftrightarrow$ $cl(G)$ همیلتونی باشد.

۲) اگر $cl(G)$ گراف کامل باشد، G همیلتونی است.

تطابق (Matching):

فرض کنید G یک گراف باشد، $\emptyset \neq M \subseteq E(G)$. M را یک تطابق G گوییم، هرگاه شامل هیچ دو یال مجاور نباشد. اگر $e = uv \in M$، می‌گوییم M، u و v را می‌پوشاند.

M را یک تطابق ماکسیمال G گوییم هرگاه تطابق M' از G موجود نباشد که $|M| < |M'|$.

M را یک تطابق کامل ۱-عامل G گوییم هرگاه همه‌ی رئوس را بپوشاند.

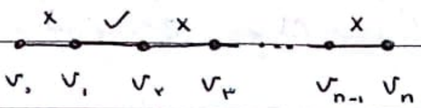
تمرین: هر تطابق کامل، ماکسیمال است.

تمرین: اگر M یک تطابق G باشد که حداکثر یک رأس نسبت به آن آزاد باشد، M ماکسیمال است. (اگر $u \in V(G)$ توسط M پوشیده نشود، می‌گوییم u نسبت به M آزاد است.)

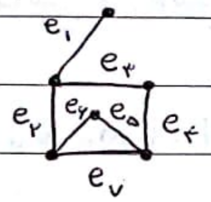
تعریف: فرض کنید M یک تطابق G و $P = e_1, \dots, e_{2k+1}$، $e_1 = v_0 v_1$ و

SEVAN

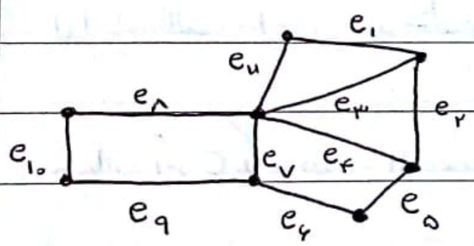
v_{2k} ، e_{2k+1} ، v_{2k+1} ، P یک مسیر در G باشد. P را M-افزوده گوییم هرگاه v_0 و v_{2k+1} توسط M پوشیده نشده‌اند (نسبت به M آزاد هستند) و یال‌های آن یکی در میان در M باشند. P را M-متناوب گوییم هرگاه یال‌هایش به طور متناوب در M باشند.



مثال: ماکسیمال و کامل است زیرا تمام رأس‌ها را $\{e_1, e_4, e_6\}$ می‌پوشاند و ۱-عامل است.



تمرین: تطابق ماکسیمال برای G بیابید.



قضیه (Berge): یک تطابق M از گراف G ماکسیمال است اگر و تنها اگر هیچ مسیر M-افزوده‌ای در G نباشد.

برهان: فرض کنید M یک تطابق و P یک مسیر M-افزوده در G باشد، آن گاه نشان می‌دهیم M ماکسیمال نیست. فرض کنید مسیر $P: e_1, \dots, e_{2k+1}$ ، M-افزوده باشد. لذا

$e_1 ، e_3 ، \ldots ، e_{2k+1}$ در M نیستند و $e_2 ، \ldots ، e_{2k}$ در M هستند. قرار دهید

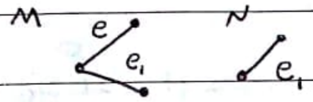
$M_1 = M \setminus \{e_2, \ldots, e_{2k}\} \cup \{e_1, \ldots, e_{2k+1}\}$. در این صورت M_1 یک تطابق است و

$|M_1|>|M|$ لذا M ماکسیمال نیست.

برعکس: فرض کنید M یک تطابق G و هیچ مسیر M-افزوده‌ای در G نباشد و M ماکسیمال

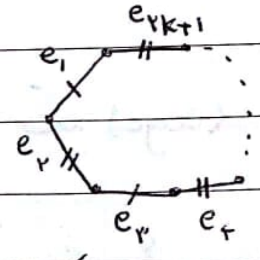
نباشد. فرض کنید N یک تطابق ماکسیمال G باشد، بنابراین $|N|>|M|$. قرار دهید

$H=[M \Delta N]$ $\quad u \in V(H) \quad \deg_H(u) = 1$ یا 2



لذا با مطالب قبل، هر مؤلفه‌ی همبندی در H یا دور است یا مسیر.

به علاوه اگر C یک دور در H باشد، طول آن زوج است. لذا $|E(C)\cap M| = |E(C)\cap N|$



(یال‌های H هر یالی یا در M است یا N. ادعا می‌کنیم طولش زوج است چرا که فرض کنید

اولی در M، دومی در N، سومی در M و ... اگر طولش فرد باشد، e_{2k+1} در M می‌افتد

ولی $2k+1$ و 1 رأس مشترک دارند و در یک تطابق افتادند که این تناقض است.)

لذا در H حداقل یک مؤلفه‌ی همبندی مانند P هست که P مسیر است و $|E(P)\cap M|<|E(P)\cap N|$

لذا P به طول فرد است. به علاوه P، M-افزوده است.

دلیلم $P=e_1e_2\dots e_{2k+1}$ که $e_1,\dots,e_{2k+1}$ در N هستند و لذا در M نیستند.

اگر $e_1=v_1v_2$ و $e_{2k+1}=zw$ یعنی $P: v_1 - v_2 - \dots - z - w$

به علاوه v_1 و w که دو انتهای P هستند، نسبت به M آزادند لذا P یک مسیر M-افزوده است.

قضیه (هال):

نمادگذاری: اگر G گراف، $\emptyset\neq S\subseteq V(G)$

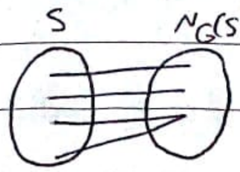
$$N_G(S)=\{v\in V(G);\ v\sim u \text{ for some } u\in S\}$$

فرض کنید G یک گراف همبند و (X,Y)-دوبخشی باشد. آنگاه G دارای یک تطابق ماکسیمال است که X را می‌پوشاند اگر و تنها اگر $\forall\, \emptyset\neq S\subseteq X \quad |S|\leq|N_G(S)|$

برهان: فرض کنید X دارای تطابق ماکسیمال M باشد که X را می‌پوشاند. فرض کنید $|S|>|N_G(S)|$

Date: ۹۷/۸/۱۹   Subject:

در این صورت برای یک $s \in S$، عضوی در $N_G(S)$ مانند s_1 نیست که $ss_1 \in M$.



لذا M، S را نمی‌پوشاند که این با این که M، X را می‌پوشاند

تناقض دارد.

برعکس: فرض کنید برای هر $S \subseteq X$ داشته باشیم $|S| \leq |N_G(S)|$. باید نشان دهیم X دارای -

تطابق ماکسیمال M است که X را می‌پوشاند. گراف جدید H را به صورت زیر می‌سازیم:

توجه: برای هر $u \in X$، $v \in V$ که $u \sim v$ یعنی $uv \in E(G)$، آن گاه $x \sim u \sim v \sim y$

$V(H) = V(G) \cup \{x,y\}$. $x,y \notin V(G)$. $E(H) = E(G) \cup \{xu : u \in X, yv : v \in Y\}$

جابجا

یک مسیر بین x و y است.

بنابراین G دارای یک تطابق است که X را می‌پوشاند اگر و تنها اگر $|X|$ مسیر مستقل در H

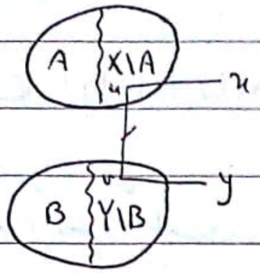
بین x و y موجود باشد. با قضیه‌ی اول منگر: تعداد مسیرهای مستقل بین x و y برابر $|X|$

است اگر و تنها اگر برای هر $S \subseteq V(G)$ که (x,y)-تفکیک کننده باشد داشته باشیم $|S| \geq |X|$

لذا کافی است نشان دهیم اگر $S \subseteq V(G)$، (x,y)-تفکیک پذیر باشد داریم $|S| \geq |X|$.

فرض کنید $\emptyset \neq S = A\cup B \subseteq V(G)$، (x,y)-تفکیک پذیر باشد، $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$.

داریم هر رأس در $X\setminus A$ با هیچ رأسی در $Y\setminus B$ مجاور نیست.



لذا $N(X\setminus A)\subseteq B$.

داریم $|X\setminus A| \leq |N_G(X\setminus A)| \leq |B|$

$$\Rightarrow |S| = |A|+|B| \geqslant |A| + |X\setminus A| = |X|$$

و حکم ثابت است.

نتیجه (فروبنیوس): هر گراف k-منتظم دوبخشی یک تطابق کامل دارد.

برهان: فرض کنید G یک گراف (X,Y)-دوبخشی باشد، G، k-منتظم باشد. داریم:

$$|E(G)| = k|X| = k|Y| \Rightarrow |X| = |Y|$$

نشان می‌دهیم G دارای تطابقی است که X را می‌پوشاند. فرض کنید $\emptyset \neq S\subseteq X$، باید نشان دهیم $|S|\leq N_G(S)$. فرض کنیم E_1 همه‌ی یال‌هایی باشد که رأسی در S دارند. فرض کنیم E_2 همه‌ی یال‌هایی باشد که یک سر آن در $N_G(S)$ است. داریم $E_1\subseteq E_2$.

Date: ۹۷/۸/۲۱ Subject:

$|E_2| = k|N_G(S)| \geq |E_1| = k|S| \Rightarrow |S| \leq |N_G(S)|$

با فرض حالت، G دارای تطابقی مانند M است که X را می‌پوشاند. چون G، (X,Y)-دوبخشی است و $|X|=|Y|$ لذا M، Y را نیز می‌پوشاند، در نتیجه M یک تطابق کامل است.

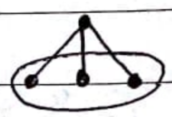
رنگ آمیزی گراف:

تعریف: فرض کنید G یک گراف باشد، یک رنگ آمیزی k-یالی، تابع $\alpha: E(G)\to\{1,\dots,k\}$ است. به $\{1,\dots,k\}$ مجموعه k-رنگ گوییم. از نماد G^α برای حالتی استفاده می‌کنیم که α یک k-رنگ آمیزی یالی برای G باشد.

α را سره (محض) گوییم اگر هیچ دو یال مجاور هم رنگ نباشند.

عدد رنگی یالی: $\chi'(G) = \min\{k \mid$ یک k-رنگ آمیزی یالی سره برای G وجود دارد$\}$

مثال: $K_{1,n}$ $\quad \chi'(G)=n$



تمرین: $\Delta(G)\leq\chi'(G)\leq|E(G)|$

تمرین: فرض کنید α یک k-رنگ آمیزی یالی G باشد. $\forall i\in\{1,\dots,k\};\ E_i=\{e\in E(G) \mid \alpha(e)=i\}$.

Date: ۹۷ / ۸ / ۲۱ Subject:

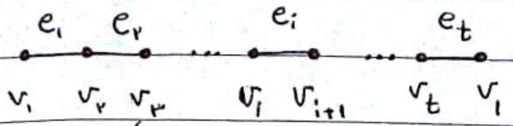
اگر α سره باشد نشان دهید هر E_i یک تطابق است.

نماد گذاری: اگر α یک رنگ آمیزی k-یالی G باشد و $u\in V(G)$ و $i\in\{1,\dots,k\}$ ، می‌گوییم u و i بر هم منطبق هستند اگر u یک سر یالی باشد که رنگ i دارد.

اگر α یک رنگ آمیزی k-یالی باشد و $i_1,\dots,i_t\in\{1,\dots,k\}$ از نماد $G^\alpha[i_1,\dots,i_t]$ برای گراف القایی توسط $E_{i_1},\dots,E_{i_t}$ استفاده می‌کنیم.

لم: فرض کنید G همبند باشد و دور به طول فرد نباشد، در این صورت یک ۲-رنگ آمیزی یالی (نه لزوما سره) از G موجود است به طوری که هر رأس v که $d_G(v)\geq 2$ بر هر دو رنگ منطبق است.

برهان: حالت ۱: G اویلری باشد. پس درجه‌ی هر رأس آن زوج است و اگر درجه‌ی همه‌ی رئوس ۲ باشد دور تشکیل می‌شود و چون دور به طول زوج می‌شود، G، ۲-رنگ پذیر است. اگر دور نباشد، رأس $v_1\in V(G)$ ای هست که $d_G(v_1)\geq 4$. فرض کنید $e_1e_2\dots e_t$ یک تور اویلری در G باشد که $e_i=v_iv_{i+1}$ ، $v_1=v_{t+1}$.



تعریف کنید $\alpha(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{: } i \text{ فرد است.} \\ 2 & \text{: } i \text{ زوج است.} \end{cases}$. رئوس $v_1, v_2, \dots, v_t$ در هر دو رنگ منطبق

هستند. چون $\deg(v_1) \geq 4$ لذا $\exists i \; i = 2, \dots, t \quad v_1 = v_i$

و مسئله تمام است.

حالت ۲: G اویلری نباشد. رأس x را به G اضافه می‌کنیم و x را به همه‌ی رئوس از

درجه‌ی فرد وصل می‌کنیم. گراف حاصل را H می‌نامیم.

$V(H) = V(G) \cup \{x\}$ $\quad E(H) = E(G) \cup \{xv : \deg(v)$ فرد است$\}$

درجه‌ی هر رأس در H زوج است لذا H اویلری است. فرض کنیم $e_0 e_1 \dots e_t$, $e_i = v_i v_{i+1}$

یک تور اویلری در H باشد. تعریف کنید $\alpha(e_i) = \begin{cases} 1 & i \text{ فرد} \\ 2 & i \text{ زوج} \end{cases}$ اگر $\deg_G(v) \geq 2$ و زوج باشد

که در هر دو رنگ منطبق است. فرض کنید $\deg_G(v) \geq 3$ و فرد است. لذا دنبال e_i و

e_{i+1} هستند که در v اشتراک دارند و حکم ثابت است.

Date: ۹۷/ ۹ / ۳ Subject:

فرض کنید G یک گراف و α یک k-رنگ آمیزی یالی G باشد، قرار دهید

$\forall v\in V(G)$ $C_\alpha(v)=|\{i$ ، i بر v منطبق است ، $i=1,\dots,k\}|$

فرض کنید β یک k-رنگ آمیزی یالی G باشد به طوری که $\sum_{v\in V(G)} C_\beta(v) < \sum_{v\in V(G)} C_\alpha(v)$

آن گاه β را یک بهبود α گوییم.

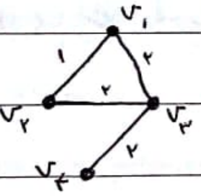
α را بهینه گوییم هرگاه هیچ بهبودی نداشته باشد.

تمرین: $C_\alpha(v)\leq \deg_G(v)$

تمرین: α سره است اگر و تنها اگر $\forall v\in V$ $C_\alpha(v)=\deg_G(v)$

مثال:

$\alpha:$



$C_\alpha(v_1)=۲$

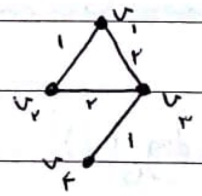
$C_\alpha(v_2)=۲$

$C_\alpha(v_3)=۱$

$C_\alpha(v_4)=۱$

$<$

$\beta:$



$C_\beta(v_1)=۲$

$C_\beta(v_2)=۲$

$C_\beta(v_3)=۲$

$C_\beta(v_4)=۱$

لم: فرض کنید α یک k-رنگ آمیزی بهینه باشد. برای گراف G و $v\in V(G)$ فرض کنید رنگ i

بر v منطبق نباشد و رنگ j، ۲ بار بر v منطبق باشد، آن گاه مؤلفه‌ی همبندی $G^\alpha[i,j]$

که شامل v است یک دور فرد است.

SEVAN

برهان: فرض کنید H مؤلفه‌ی همبندی $G^{\alpha}[i,j]$ شامل v باشد لذا $d_H(v)\geq 2$.

بنابر قبل (H دور فرد نباشد ...) یک ۲-رنگ آمیزی یالی مانند $\gamma: E(H)\to\{1,2\}$ هست که هر

رأس از درجه‌ی حداقل ۲، به هر ۲ رنگ ۱ و ۲، منطبق است.

تعریف کنید $\beta(e)=\begin{cases}\gamma(e) & e\in E(H)\\ \alpha(e) & e\notin E(H)\end{cases}$ ، حال داریم $C_\beta(v)=C_\alpha(v)+1$ و لذا چون حداقل

برای رأس v، $C_\beta(v)=C_\alpha(v)+1$ پس: $\sum_{u\in V(G)} C_\beta(u) > \sum_{u\in V(G)} C_\alpha(u)$ یعنی β یک بهبود α است

که تناقض است.

قضیه (konig): اگر G یک گراف دوبخشی باشد، داریم $\chi'(G)=\Delta(G)$.

برهان: فرض کنید α یک $\Delta(G)$-رنگ آمیزی بهینه‌ی G باشد. نشان می‌دهیم:

$$\forall v\in V(G)\quad C_\alpha(v)=\deg_G(v)$$

فرض کنید $v\in V(G)$ ، $C_\alpha(v)<\deg_G(v)$ لذا دو یال هستند که در v کاشته و هم رنگ اند، و

به علاوه یک رنگ i هست که بر v منطبق نیست. بنابر قبل، G شامل یک دور فرد است

که تناقض است.

قضیه (وینزینگ) : برای هر گراف داریم $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$

رنگ آمیزی رأسی :

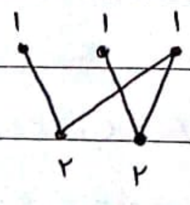
فرض کنید G یک گراف باشد. منظور از یک k-رنگ آمیزی رأسی (یا به اختصار k-رنگ آمیزی) از گراف G، تابع $\alpha : V(G) \to \{1, \dots, k\}$ است.

α را سره گوییم هرگاه هر دو رأس مجاور، رنگ متفاوت داشته باشند.

رنگ i را برای v جایز یا معتبر گوییم هرگاه هیچ رأسی که با v مجاور است رنگ i نداشته باشد.

گراف G را k-رنگی گوییم هرگاه یک k-رنگ آمیزی سره برای G موجود باشد.

به کوچک ترین k ای که G، k-رنگی باشد، عدد رنگی G (عدد رنگی رأسی) گوییم و با نماد $\chi(G)$ نمایش می دهیم.



مثال: G دوبخشی است اگر و تنها اگر $\chi(G)=2$.

لم: فرض کنید α یک k-رنگ آمیزی سره برای G باشد و θ یک جایگشت روی k رنگ

$\alpha : V(G) \to \{1, \dots, k\} \xrightarrow[\text{1-1 on}]{\theta} \{1, \dots, k\}$

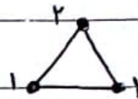
باشد، آن گاه

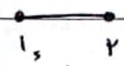
Θ_α : یک k-رنگ آمیزی سره از G است.

(اثبات ـ تمرین)

تعریف: فرض کنید $\chi(G)=k$. G را k-بحرانی گوییم هرگاه برای هر $H\subset G$ داشته باشیم $\chi(H)<k$.

مثال:





حذف راس

یا

حذف یال

$\chi(K_3)=3$

تمرین: K_n گرافی n-بحرانی است.

تمرین: K_2 تنها گراف ۲-بحرانی است.

چون ۳ بحرانی، ۲ بخشی نیست، چون ۲ بخشی نیست، شامل دور فرده، چون شامل دور فرده یعنی یه زیرگرافی داره که دور فرد داره که عددش میشه ۳. چون $\chi(H)<\chi(G)$ لذا H باید خود G باشه.

تمرین: اگر G، ۳-بحرانی باشد، دور فرد است.

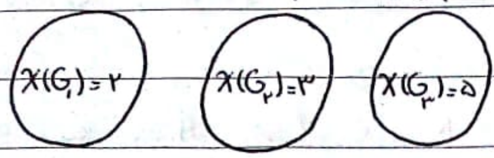
قضیه: فرض کنید G، k-بحرانی باشد و $k\geq 2$. در این صورت G همبند است، $\delta(G)\geq k-1$.

برهان: فرض کنید G، k-بحرانی باشد و G_1، ...، G_t مؤلفه های همبندی G باشند و $t\geq 2$.

در این صورت $G_i\subseteq G$ و $\chi(G_i)=\chi(G)$ s.t. $\exists i=1,\dots,t$ $\chi(G)=\max\{\chi(G_i)\}$

که با k-بحرانی بودن G در تناقض است.

G_1 G_2 G_3



$G_3 \subseteq G$, $\chi(G_3) = \chi(G) = 5$

که تناقض است پس $G = G_3$.

حال نشان می‌دهیم $\delta(G) \geq k-1$. فرض کنید $v \in V(G)$ ، $d_G(v) = \delta(G) \leq k-2$. قرار دهید

$H = G - v$. در این صورت $\chi(H) \leq k-1$.

$\chi(H) \leq k-1$

یعنی یک k-1 - رنگ آمیزی سره برای H وجود دارد، آن را α می‌نامیم.

چون $d_G(v) = \delta(G) \leq k-2$ لذا حداکثر k-2 رنگ از این k-1 رنگ برای رئوس مجاور v استفاده شده است. لذا حداقل یک رنگ از k-1 رنگ برای v معتبر است؛ یعنی $\chi(G) \leq k-1$ که تناقض است.

قضیه: $k = \chi(G) \geq 2$. در این صورت:

1) G دارای زیرگراف H است که k- بحرانی است.

2) G دارای حداقل k رأس از درجه‌ی بزرگتر مساوی k-1 است.

3) $k \leq \max \delta(H) + 1$ که $H \subseteq G$ ، k- بحرانی است.

برهان ۱: اگر G، k-بحرانی باشد که حکم ثابت است. فرض کنیم k-بحرانی نباشد. بنابراین

هست $H \subset G$ موجود است که $\chi(H)=k$. با ادامه‌ی همین روند به گرافی می‌رسیم که یا

$\chi(H')=k$ یا یک یال است که ۲-بحرانی است.

برهان ۲: فرض کنید H زیرگرافی از G است که k-بحرانی می‌باشد. بنابراین $\chi(H)=k$

لذا $|V(H)| \geq k$. با قضیه‌ی قبل داریم $\forall v \in V(H) \quad d_G(v) \geq d_H(v) \geq \delta(H) \geq k-1$

برهان ۳: فرض کنید $H \subset G$، k-بحرانی باشد. با قضیه‌ی قبل $k-1 \leq \delta(H)$ لذا $k \leq \delta(G)+1$

قضیه (Brooks): فرض کنید G همبند باشد، آنگاه $\chi(G) = \Delta(G)+1$ اگر و تنها اگر

G یک دور فرد یا گراف کامل باشد.

چند جمله‌ای رنگی:

برای گراف G تعریف کنید $\psi_G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ که

$\psi_G(k) = |\{\alpha \text{ s.t. } \alpha : V(G) \to \{1, \dots, k\}$ یک رنگ آمیزی سره باشد $\alpha\}|$

مثال: اگر $k < \chi(G)$ داریم $\psi_G(k)=0$

$\chi(G)=\{k, \Psi_G(k)\neq 0\}$

مثال: $G=K_4$

$\Psi_G(k)=k(k-1)(k-2)(k-3)$

مثال: فرض کنید $E(G)=\emptyset$ و $|V(G)|=n$.

$\Psi_G(k)=k^n$

تعریف: به $\Psi_G(k)$ چندجمله‌ای رنگی G گوییم.

قضیه: اگر $e\in E(G)$،

$\Psi_G(k)=\Psi_{G-e}(k)-\Psi_{G.e}(k)$

برهان: فرض کنید α یک k-رنگ‌آمیزی سره برای $G-e$ باشد. فرض کنید $e=uv$ است.

۱) فرض کنید $\alpha(u)\neq\alpha(v)$، آن‌گاه α یک k-رنگ‌آمیزی سره برای G است.

۲) اگر $\alpha(u)=\alpha(v)$ در این صورت α یک k-رنگ‌آمیزی سره برای $G.e$ است.

و حکم ثابت است.

مثال: $\Psi_G(k)$ یک چندجمله‌ای است.

برهان: اگر $E(G)=\emptyset$ و $|V(G)|=n$، آن‌گاه $\Psi_G(k)=k^n$ چندجمله‌ای است.

فرض کنید $E(G)\neq\emptyset$، حکم برای گراف‌های با تعداد کمتر یال نسبت به G، حکم ثابت باشد.

Date: ۹۷/۹/۱۰ Subject:

فرض کنید $e \in E(G)$. $\Psi_G(k)=\Psi_{G-e}(k)-\Psi_{G.e}(k)$

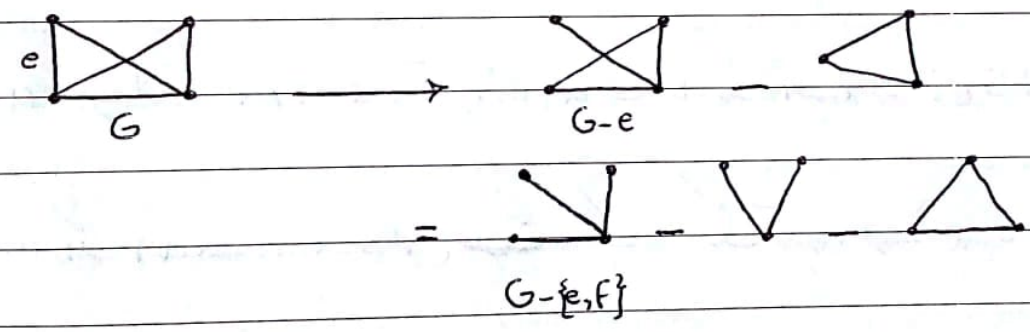
با فرض استقرا $\Psi_{G-e}(k)$ و $\Psi_{G.e}(k)$ چندجمله‌ای هستند لذا حکم ثابت است.

تمرین: فرض کنید G_1، ...، G_m مؤلفه‌های همبندی G باشند.

$$\Psi_G(k)=\Psi_{G_1}(k)\ldots\Psi_{G_m}(k)$$

تمرین: فرض کنید T درخت باشد. $\Psi_T(k)=k(k-1)^{n-1}$

مثال: چندجمله‌ای رنگی گراف زیر را محاسبه کنید:



$$=k(k-1)^3-k(k-1)^2-k(k-1)(k-2)=k^4-5k^3+8k^2-4k$$

قضیه: فرض کنید $|V(G)|=n$

۱) درجه‌ی $\Psi_G(k)$ برابر است با n.

۲) ضریب k^n برابر است با ۱.

۳) ضریب k^{n-1} برابر است با $|E(G)|$.

۴) مقدار ثابت $P_G(k)$ برابر است با ۰.

گراف های مسطح:

گراف G را مسطح گوییم هرگاه بتوان G را طوری در صفحه ترسیم نمود که یال های G فقط در رئوس G یکدیگر را قطع کنند. به چنین ترسیمی از G یک ترسیم مسطح G گوییم.

مثال:  مسطح اند.

تعریف: فرض کنید P(G) یک ترسیم مسطح G باشد. منظور از وجه داخلی P(G)، ناحیه ای است که بین یال های G محصور است.

به ناحیه ای که نامحدود است، وجه خارجی P(G) می گوییم.

به یال هایی که یک وجه را محصور می کنند، مرزهای آن می گوییم.

به رأس ها یا یال های وجه خارجی، رأس یا یال خارجی می گوییم.

به رأس ها یا یال هایی که خارجی نیستند، داخلی می گوییم.

Date: ۹۷/ ۹ /۱۰ Subject:

هر دو وجه متمایز F_1 و F_2، مجزا هستند.

وجه خارجی منحصر به فرد است.

هر یال مرز حداکثر دو وجه است.

هر دور حداقل یک وجه داخلی $P(G)$ را محصور می‌کند.

هر پل مرز فقط وجه بیرونی است.

هر یالی که پل نباشد، مرز دو وجه است.

تمرین: $P(G)$ شامل هیچ وجه داخلی‌ای نیست اگر و تنها اگر G دور نداشته باشد.

فرمول اویلر: فرض کنید G همبند و مسطح باشد. فرض کنید $P(G)$ یک ترسیم مسطح G باشد و r تعداد وجه‌های $P(G)$ باشد. داریم:

$$|V(G)| - |E(G)| + r = 2$$

برهان: با استقرا روی r:

$r = 1$: (وجه داخلی نداریم) در این صورت G دور ندارد و درخت است، و داریم:

$$|E(G)| = |V(G)| - 1 \Rightarrow |V(G)| - |E(G)| + 1 = 2$$

SEVAN

Subject:

Date: ۹۷/ ۹ /۱۲

حال فرض کنیم حکم برای گراف‌ها با تعداد کم‌تر وجه از r، درست باشد. چون $r \neq 1$ لذا گراف حتماً دور دارد. لذا G شامل حداقل یک دور است، درنتیجه G شامل یک یال e است که پل نیست. گراف $G-e$ مسطح، همبند است، و دارای $r-1$ وجه می‌باشد. با فرض استقرا داریم:

$$|V(G)| - (|E(G)|-1) + (r-1) = 2 \qquad |V(G)| - |E(G)| + r = 2$$

قضیه: فرض کنید G مسطح باشد، $|V(G)| \geq 3$ آن‌گاه $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$ به علاوه اگر G بدون مثلث باشد (دوری به طول ۳ نداشته باشد) آن‌گاه $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$.

برهان: اگر G ناهمبند باشد، $G_1, \dots, G_k$ $(k \geq 2)$ مؤلفه‌های همبندی G باشند و حکم در مورد G_iها درست باشد، داریم:

$$|E(G)| = \sum_{i=1}^{k} |E(G_i)| \leq 3\sum_{i=1}^{k} v(G_i) - 6k = 3|V(G)| - 6k \leq 3|V(G)| - 6$$

بنابراین فرض کنید G هم‌بند است. اگر $|E(G)| \leq 2$ که حکم ثابت است. پس فرض کنید $|E(G)| \geq 3$ فرض کنید $P(G)$ یک ترسیم مسطح G، و r وجه $P(G)$ باشند، در این صورت داریم $2|E(G)| \geq 3r$، چون هر وجه شامل حداقل ۳ یال است و هر یال مرز حداکثر ۲ وجه.

Date: ۹۷/ ۹ / ۱۲ Subject:

با فرمول اویلر داریم $6 + |E(G)| - 3|V(G)| \leq 0$ $3(2 + |E(G)| - |V(G)|) \leq 2|E(G)|$

لذا داریم $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$

اگر G شامل مثلث نباشد، در این صورت هر وجه شامل حداقل ۴ یال است. مشابها می‌توان

فرض کرد که G هم بند است. داریم: $4r \leq 2|E(G)| \Rightarrow 4(2 + |E(G)| - |V(G)|) \leq 2|E(G)|$

$\Rightarrow 2|E(G)| - 4|V(G)| + 8 \leq 0 \Rightarrow |E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$

قضیه (Heawood): اگر G مسطح باشد داریم $\delta(G) \leq 5$.

برهان: اگر $|V(G)| \leq 2$ که حکم ثابت است. پس فرض کنید $|V(G)| \geq 3$. با قضیه قبل

$$\delta(G) \times |V(G)| \leq \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| \leq 6|V(G)| - 12$$

$$\delta(G) \leq 6 - \frac{12}{|V(G)|} \lneq 5$$

مثال: K_5 مسطح نیست.

$|V(G)| = 5$ $|E(G)| = 10$ $G = K_5$

اگر مسطح باشد باید داشته باشیم: $10 \leq 15 - 6 = 9$ ✗

SEVAN

Date: ۹۷ / ۹ / ۱۲ Subject:

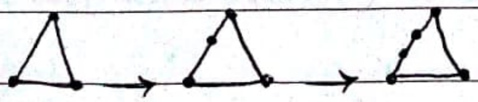
مثال: $K_{3,3}$ مسطح نیست.

اگر مسطح باشد: $9 \le 12-4$ ✗ $|E(G)|=9$ $|V(G)|=6$

لم: فرض کنید F یک وجه ترسیم مسطح گراف مسطح G باشد به طوری که مرزش حداقل ۴ یال دارد، آن گاه F دو رأس دارد که در G مجاور نیستند.

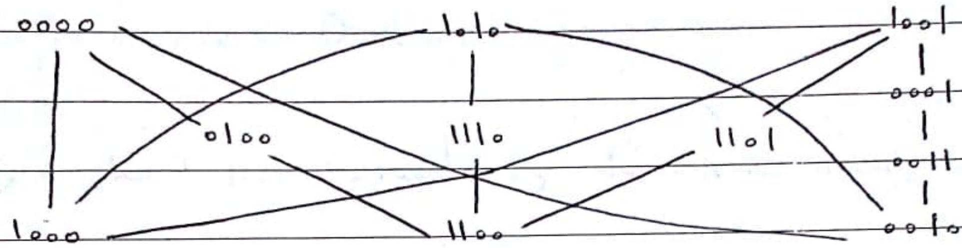
برهان: فرض کنید K گراف القا شده توسط رئوس F باشد. فرض کنید K کامل باشد. هر یال K مرز F است و یا از F بیرون است. رأس x را داخل F اضافه کنید و از x به همه‌ی رئوس F وصل کنید. گراف حاصل را Y بنامید. در این صورت Y کامل است و $K \subseteq Y$. به علاوه Y مسطح است لذا $|V(Y)| \le 4$ ، لذا $|V(K)| \le 3$ که با این که F حداقل ۴ یال دارد در تناقض است.

تعریف: یال $e=uv \in G$ را یک مشتق شده گوییم اگر e را با یک مسیر u-x-v به طول ۲ عوض کنیم. یک مشتق M از G، گرافی است که با یک دنباله‌ی متناهی از مشتق شده‌های G حاصل شده باشد.



قضیه (کوراتوسکی): یک گراف G مسطح است اگر و تنها اگر شامل گراف مشتق K_5 یا $K_{3,3}$ نباشد.

مثال: Q_4 مسطح نیست زیرا می‌توان زیرگرافی از آن پیدا کرد که مشتق شده از $K_{3,3}$ باشد.



قضیه: اگر G مسطح باشد، $\chi(G) \le 6$.

برهان: با استقرا روی $|V(G)|$، اگر $|V(G)| \le 5$ که حکم واضح است. فرض کنید $|V(G)| \ge 6$.
چون G مسطح است داریم $\delta(G) \le 5$. فرض کنید $v \in V(G)$، $\deg_G(v) = \delta(G) \le 5$.
G-v مسطح است، لذا با فرض استقرا $\chi(G-v) \le 6$. لذا یک ۶-رنگ آمیزی سره برای G-v موجود است چون $\deg_G(v) \le 5$ بنابراین حداقل یک رنگ از این ۶ رنگ برای v میسر است که با رنگ کردن v، یک ۶-رنگ آمیزی سره برای G حاصل می‌شود.

قضیه: اگر G مسطح باشد، $\chi(G) \le 5$. (اثبات، ۲ صفحه بعد)

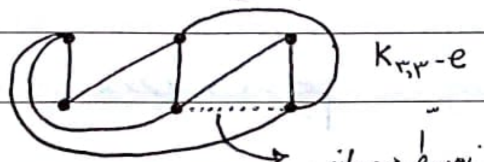
قضیه (۴ رنگ): اگر G مسطح باشد، $\chi(G)\le 4$.

گراف مسطح G را ماکسیمال گوییم هرگاه گراف $G+e$ مسطح نباشد.

مثال: $K_5\setminus e$ که $e\in E(K_5)$ یک گراف ماکسیمال است.

مثال: اگر $e\in E(K_{3,3})$، آیا $K_{3,3}-e$ ماکسیمال است؟

خیر، چون می‌توان به گراف $K_{3,3}-e$ یال e ای اضافه کرد که هنوز هم مسطح بماند ولی گراف حاصل $K_{3,3}$ نیست.



با اضافه کردن این یال گراف مسطح می‌ماند.

مثال: اگر G مسطح و ماکسیمال باشد و $|V(G)|\ge 3$، آن گاه هر وجه از هر ترسیم مسطح دقیقاً ۳ یال دارد.

برهان: فرض کنید F یک وجه G و تعداد یال‌های F حداقل ۴ باشد. با مطالب قبل حداقل ۲ رأس F در G مجاور نیستند. کافی است دو رأس با یالی که از داخل وجه می‌گذرد به هم وصل کنیم. گراف حاصل مسطح است که با ماکسیمال بودن G در تناقض است.

قضیه: اگر G مسطح و ماکسیمال باشد، آن گاه $|E(G)|=3|V(G)|-6$.

برهان: فرض کنید F یک وجه G باشد. در این صورت F دقیقاً ۳ یال دارد. داریم $3r = 2|E(G)|$

که r تعداد وجه‌های G است. $3(|E(G)| - |V(G)| + 2) = 2|E(G)|$

$|E(G)| = 3|V(G)| - 6$

ماتریس:

فرض کنید G یک گراف بدون طوقه باشد. ماتریس مجاورت $A(G)$، ماتریس وقوع $I(G)$ را

به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $|V(G)| = n$

$$A(G) = [a_{ij}] = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} v_1 & \cdots & v_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \quad , \quad \begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{اگر } v_i \sim v_j \\ a_{ij} = 0 & \text{اگر } v_i \not\sim v_j \end{cases}$$

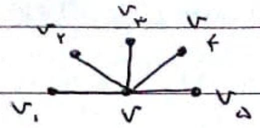
قضیه: اگر G مسطح باشد، $\chi(G) \leq 5$.

برهان: فرض کنید G مسطح و ۶-رنگ‌پذیر و بحرانی باشد لذا با مطالب قبل $\delta(G) \geq 6-1 = 5$

لذا یک رأس v هست به طوری که $\delta(G) = \deg_G(v) \geq 5$. از طرفی چون G مسطح است

$\delta(G) \leq 5$. بنابراین $5 = \deg_G(v) = \delta(G)$. چون G، ۶-بحرانی است لذا $\chi(G-v) \leq 5$

و در نتیجه یک ۵-رنگ‌آمیزی سره‌ی α برای $G-v$ وجود دارد. فرض کنید $N_G(v) = \{v_1, \dots, v_5\}$



فرض کنید v_i ها، $i=1,\dots,5$ به صورت مقابل باشند:

چون $\chi(G)=6$ لذا رنگ v_i ها از ۱ تا ۵ در $G-v$ متمایز اند.

فرض کنید $i=1,\dots,5$ ، $\alpha(v_i)=i$. فرض کنید $i,j\in\{1,\dots,5\}$ و $H=G-v$.

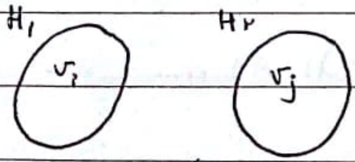
در زیرگراف $H[i,j]$ داریم v_i و v_j در یک مؤلفه‌ی همبندی هستند.

(فرض کنیم در یک مؤلفه‌ی همبندی نباشند. حال در H_1 رئوسی که رنگ i دارند را با رئوسی که رنگ j دارند

عوض می‌کنیم. رنگ آمیزی هم چنان سره است زیرا هیچ رأسی در گراف نیست که رنگ اولش داشته باشد

و با این ۲ مجاور باشد چون همه را در H_1 و H_2 ریخته بودیم. پس حال رنگ آمیزی ما سره و رنگ v_i و v_j یکی

است. اگر رنگ v_i و v_j یکی باشد، گراف بالا را می‌توان با ۵ رنگ به صورت سره رنگ آمیزی کرد که



این متناقض است پس v_i و v_j در یک مؤلفه‌ی همبندی قرار دارند.

تمام رأس‌های این‌جا با رنگ i یا j)

در غیر این صورت فرض کنید H_1 مؤلفه‌ی همبندی شامل v_i باشد، در H_1 رئوسی که رنگ i دارند با j

رنگ کنید و رئوسی که رنگ j دارند با رنگ i. در این صورت یک ۵-رنگ آمیزی سره‌ی جدید برای H

حاصل می‌شود که در آن هر دوی v_i و v_j رنگ i دارند چون v_3 و v_5 با ۴ رنگ رنگ شده‌اند

یک رنگ برای v میسر است لذا گراف G یک ۵-رنگ‌آمیزی سره دارد که تناقض است.

حال فرض کنید مسیر بین v_i و v_j در $H[i,j]$، P_{ij} باشد. با توجه به ترسیم v_1 تا v_4 مسیرهای

$P_{1,3}$ و $P_{2,4}$ مجزا نیستند که این تناقض است چون فرض کنید $u \in V(P_{1,3}) \cap V(P_{2,4})$.

در این صورت u با رنگ ۱ و ۳ دارد و هم زمان رنگ ۲ یا ۴ دارد که تناقض است.

(P_{ij} یعنی مسیری که رأس‌هایش یا رنگ i دارند یا j)

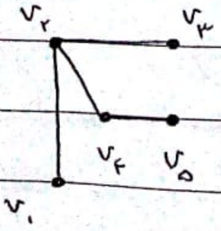
- فرض کنید G گراف و $A_{n\times n}$ ماتریس مجاورت G باشد به $\det(\lambda I_n - A)$ چندجمله‌ای

مشخصه‌ی A، G گوییم. (معادله‌ی مشخصه)

به هر ریشه‌ی $f(x) = \det(\lambda I - A)$ یک مقدار مشخصه‌ی A، G گوییم؛ به عبارت دیگر λ یک

مقدار ویژه‌ی A است هرگاه $\exists v \in R_{n\times 1}$ s.t. $Av = \lambda v$

در این صورت v را بردار مشخصه (ویژه) λ گوییم.



مثال: مطلوب است مقدار مشخصه‌ی G

Date: ۹۷/۹/۲۴ Subject:

$$A=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$f(x) = \det(\lambda I_5 - A) = \lambda(\lambda^4 - 4\lambda^2 + 2)$

$f(x) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

$$Av = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow v = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$v = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$

$\lambda_{1,2} = \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$

$\lambda_{3,4} = -\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$

خواص ماتریس مجاورت گراف G :

(۱) درایه‌های قطر اصلی برابر با ۰ است.

(۲) متقارن است.

(۳) اگر G ، k-منتظم باشد، حاصل جمع هر سطر یا ستون A برابر با k است.

(۴) مقادیر مشخصه‌ی A حقیقی هستند.

(۵) اگر u و v بردارهای ویژه‌ی مقادیر ویژه‌ی متمایز باشند، $u^t v = 0$.

اگر $f(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی G باشد، به m_i درجه‌ی تکرار λ_i گوییم و به $spec(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{pmatrix}$ طیف G گوییم.

مثال: مطلوب است $spec(K_3)$.

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix} \qquad f(x)=\det(\lambda I_3-A)$$

$$\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&-1\\-1-\lambda&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda(\lambda-1)-2)=(\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

$$f(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=-1,\ \lambda=2 \qquad spec(K_3)=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix} \qquad f(x)=\det(\lambda I_4-A)$$

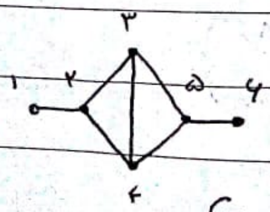
تمرین: مطلوب است $Spec(K_4)$.

$$\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda&-1&-1&-1\\-1&\lambda&-1&-1\\-1&-1&\lambda&-1\\-1&-1&-1&\lambda\end{bmatrix}$$ و ...

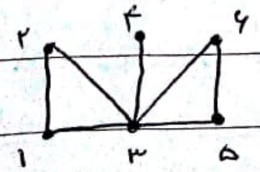
تمرین: $spec(K_n)=\begin{pmatrix}n-1&-1\\1&n-1\end{pmatrix}$.

تعریف: دو گراف G_1 و G_2 را هم‌طیف گوییم هرگاه $Spec(G_1)=Spec(G_2)$.

مثال: اگر $Spec(G_1)=Spec(G_2)$، آیا G_1 و G_2 یکریخت‌اند؟ $(G_1 \overset{?}{\cong} G_2)$ خیر.



G_1



G_2

Date: ۹۷/ ۹ / ۲۴
Subject:

چندجمله‌ای مشخصه‌ی G_1 و G_2 : $f(\lambda) = \lambda^6 - 7\lambda^4 - 4\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 1$

پس داریم $\mathrm{Spec}(G_1) = \mathrm{Spec}(G_2)$ اما $G_1 \ncong G_2$.

مثال: اگر $G_1 \cong G_2$ ، داریم $\mathrm{Spec}(G_1) = \mathrm{Spec}(G_2)$.

قضیه: فرض کنید G گراف، A ماتریس مجاورت G ، $|V(G)| = n$ ، چندجمله‌ای مشخصه‌ی G به صورت مقابل باشد:

$$f(\lambda) = \lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \dots + C_i\lambda^{n-i} + \dots$$

در این صورت : (1) $C_1 = 0$

(2) $C_2 = -|E(G)|$

(3) تعداد مثلث‌های G برابر با $-\frac{C_3}{2}$ است.

برهان: فرض کنید $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ، $\lambda I_n - A = [b_{ij}]_{n\times n}$.

$$b_{ij} = \begin{cases} \lambda & i=j \\ -a_{ij} & i\neq j \end{cases} \qquad f(\lambda) = \sum_{\delta\in S_n} (-1)^{\mathrm{Sign}(\delta)} b_{1\delta(1)} \dots b_{n\delta(n)}$$

$$\mathrm{Sign}(\delta) = \begin{cases} 0 & \delta \text{ زوج} \\ 1 & \delta \text{ فرد} \end{cases}$$

چون هر جایگشت روی n عضو که $n-1$ عضو را ثابت نگه دارد تمام n عضو را ثابت نگه می‌دارد

لذا $C_1 = 0$.

ضریب λ^n : فقط جایگشت همانی همه‌ی اعضا را ثابت نگه می‌دارد.

ضریب λ^n برابر ۱ است. $\delta =$ همانی $b_{1\delta(1)} = \lambda$

برهان ۳: ضریب λ^{n-3} باید ظاهر شود، پس باید $n-3$ تا را ثابت نگه دارد و سه تا را جابجا کند.

جایگشت بین این سه باید به شکل $(i\,j\,k)$ باشد زیرا اگر $(i\,j)$ یا $(j\,k)$ یا $(i\,k)$ باشد در هر

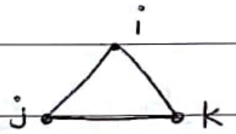
حالت یکی را ثابت نگه داشته که این تناقض است. به علاوه باید با هم مجاور باشند پس تشکیل

یک مثلث می‌دهند. داریم: $\delta: (i\,j\,k) \in S_n$ $\quad \delta^{-1}: (k\,j\,i) \in S_n$

$b_{ij} \neq 0 \to -1$

$b_{j} \neq 0 \to -1$

$b_{i} \neq 0 \to -1$



چون سه تا ۱- داریم که در هم ضرب می‌شوند پس جواب منفی می‌شود. به علاوه این که ۲ تا ۱ داریم

δ و δ^{-1}، در نتیجه تعداد مثلث‌ها $\frac{C_3}{2}-$ می‌شود.

مثال: اگر A ماتریس مجاورت G باشد و $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی A باشند، داریم $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$

حل: $f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)$

بنابراین $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ برابر با ضریب λ^{n-1} است که با منفی قبل صفر است.

مثال: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 2|E(G)|$.

حل: $(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = 0$

$= \sum_i \lambda_i^2 + 2\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j = 0 \rightarrow \sum \lambda_i^2 = -2\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j$

از طرفی $\sum \lambda_i \lambda_j$ ضریب λ^{n-2} است که با قضیه‌ی قبل برابر با $-|E(G)|$ است، بنابراین

$\sum \lambda_i^2 = 2|E(G)|$.

مثال: اگر G گرافی k-منتظم باشد، k یک مقدار ویژه‌ی G است.

حل: فرض کنید A ماتریس مجاورت G باشد، بنابراین چون در هر سطر و ستون A، k تا ۱ هستند. قرار دهید $u = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0 \rightarrow Au = \begin{bmatrix} k \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} = ku$، لذا k مقدار مشخصه است.

تمرین: اگر G همبند و k-منتظم باشد، آن‌گاه k یک مقدار ویژه‌ی G با درجه تکرار است.

گراف جهت‌دار:

گراف: گراف G زوج مرتب $(V(G), E(G))$ است که به $V(G)$ مجموعه‌ی رئوس گراف و به $E(G)$

مجموعه‌ی یال‌های گراف G می‌گویند، $V(G) \neq \emptyset$، و هر یال با دو راس مشخص می‌شود.

یک گراف جهت‌دار D شامل دو مجموعه‌ی $V(D)$, $A(D)$ است به‌طوری که به $V(D) \neq \emptyset$ ،

مجموعه‌ی رئوس، به $A(D)$ مجموعه‌ی کمان‌ها (قوس‌ها)ی D گوییم، و هر کمان (هر عضو $A(D)$) با

یک زوج مرتب از رئوس مشخص می‌شود.

$e \in A(D)$, $e=(u,v)$ آن‌گاه e را با نماد $e=uv$ یا $e: u \to v$ نمایش می‌دهیم و به u

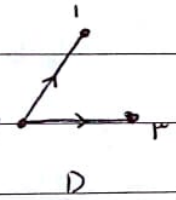
ابتدا و به v انتهای e گوییم. گراف جهت‌دار D' را زیرگراف D گوییم هرگاه $V(D') \subseteq V(D)$ و

$A(D') \subseteq A(D)$.

مثال:

$V(D)=\{1,2,3\}$

$A(D)=\{(2,3),(2,1)\}$



اگر D یک گراف جهت‌دار باشد، منظور از گراف زمینه‌ی D که با $U(D)$ نمایش می‌دهیم، گرافی

است که $V(D)=V(U(D))$ و هر کمان در D یک یال در $U(D)$ است.

اگر G یک گراف باشد چه‌بسا به هر یال G یک ترتیب نسبت داد و G را به گراف جهت‌دار

تبدیل کرد. به گراف جهت‌دار حاصل، یک جهت‌دهی از G گوییم.

گشت جهت‌دار: منظور از یک گشت جهت‌دار در گراف جهت‌دار، دنباله‌ای متناهی مانند

Date: ۹۷ / ۱۰ / ۱   Subject:

$W: v_0 a_1 v_1 a_2 \dots a_k v_k$ است که v_i ها رئوس و a_i ها کمان هستند بطوری که $a_i = v_{i-1} v_i$

$$W: v_0 \xrightarrow{a_1} v_1 \xrightarrow{a_2} v_2 \xrightarrow{a_3} \dots \to v_{k-1} \xrightarrow{a_k} v_k$$

مسیر جهت دار: به گشت جهت داری که رأس تکراری نداشته باشد یک مسیر جهت دار گوییم.

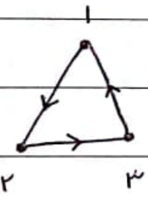
مشابهاً دور جهت دار تعریف می‌شود.

دو رأس $u,v \in V(D)$ را قویاً همبند گوییم هرگاه بین u,v و v,u یک مسیر جهت دار باشد.

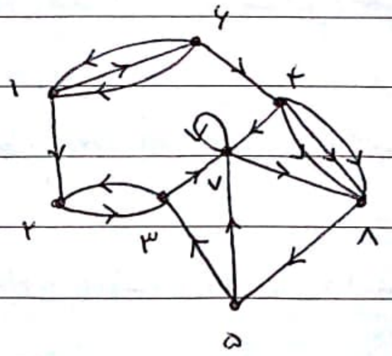
به گراف جهت دار ماکسیمال D که هر دو رأس آن قویاً همبند باشند یک مؤلفه‌ی قوی D گوییم.

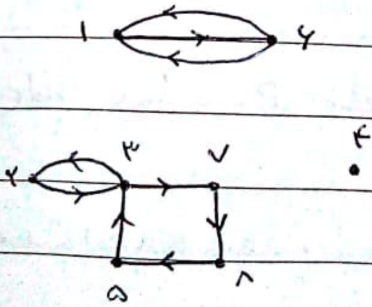
D را قویاً همبند گوییم هرگاه تنها یک مؤلفه‌ی قوی داشته باشد.

مثال: گراف قویاً همبند:



مثال: مطلوب است مؤلفه‌های قوی D.





$d^-_D(1) = 2$

$d^+_D(1) = 2$

$d^-_D(2) = 2$

$d^+_D(2) = 1$

$\delta^-(D) = 1 \qquad \Delta^-(D) = 4$

$\delta^+(D) = 1 \qquad \Delta^+(D) = 4$

اگر $v \in V(D)$ ، منظور از درجه‌ی ورودی v که با $d_D^-(v)$ نمایش می‌دهیم ، تعداد کمان‌هایی است که v انتهای آن‌هاست. منظور از درجه‌ی خروجی v که با $d_D^+(v)$ نمایش می‌دهیم ، تعداد کمان‌هایی است که v ابتدای آن‌هاست. مشابهاً $\delta^+(D)$ ، $\delta^-(D)$ ، $\Delta^+(D)$ و $\Delta^-(D)$ قابل تعریف هستند.

مثال :

$$\sum_{v \in V(D)} d_D^-(v) = \sum_{v \in V(D)} d_D^+(v) = |A(D)|$$

حل : چون هر کمان یک درجه‌ی ورودی و یک درجه‌ی خروجی می‌سازد.

اگر D گراف جهت‌دار باشد $\chi(D)$ را برابر $\chi(U(D))$ تعریف می‌کنیم.

لم : گراف جهت‌دار D دارای مسیری جهت‌دار به طول $\chi(D)-1$ است.

برهان : فرض کنید $A \subseteq A(D)$ مینیمال باشد به طوری که $D-A$ دارای دور جهت‌دار نباشد.

فرض کنید k ، طول بزرگ‌ترین مسیر جهت‌دار در $D-A$ باشد. فرض کنید $v \in V(D)$ را با رنگ i رنگ می‌کنیم وقتی طول بزرگ‌ترین مسیری که از v شروع می‌شود برابر $i-1$ است. (مسیری در $D-A$)

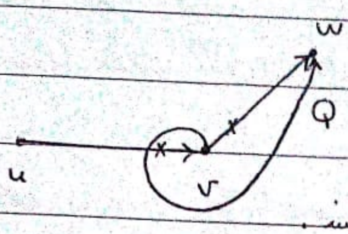
در این صورت $i = 1, \dots, k+1$. فرض کنید $P: u \xrightarrow{*} v$ مسیری جهت‌دار در $D-A$ باشد.

نشان می‌دهیم رنگ آمیزی مناسب را α بنامید. در این صورت $\alpha(u) \neq \alpha(v)$.

فرض کنید $Q: v \overset{*}{\to} w$ بزرگ ترین مسیر جهت دار در $D-A$ باشد که از v شروع شده است. چون

$D-A$ شامل دور جهت دار نیست، لذا P و Q مجزا هستند، و نتیجه PQ یک مسیر جهت دار از

v به w است، لذا $\alpha(u) \neq \alpha(v)$.

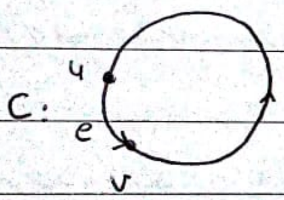


بنابراین اگر u و v در $D-A$ مجاور باشند دارای رنگ های متمایز هستند.

فرض کنید $e = uv \in A$. باید نشان دهیم $\alpha(w) \neq \alpha(v)$. در $D-A+e$ یک دور جهت دار

شامل e وجود دارد. فرض کنید C دور جهت دار در $D-A+e$ شامل e باشد. در این صورت

P یک مسیر جهت دار از v به u در $D-A$ است، و لذا $\alpha(u) \neq \alpha(v)$.



حکم ثابت است؛ یعنی $\chi(D) \le k+1$ و نتیجه $\chi(D)-1 \le k$،

لذا مسیری جهت دار به طول $\chi(D)-1$ در D وجود دارد.

قضیه: برای هر گراف G یک جهت گیری D هست به طوری که طول بزرگ ترین مسیر جهت دار آن

حداکثر برابر $\chi(G)-1$ است.

برهان: فرض کنید $\chi(G)=k$ و α یک رنگ آمیزی سره برای G باشد. فرض کنید D یک

جهت دهی به صورت زیر باشد:

$(u,v) \in A(D)$ اگر $\alpha(u) < \alpha(v)$ ($\{u,v\} \in E(G)$) در این صورت طول نزدیک ترین مسیر

در D حداکثر $\chi(D)-1$ است و حکم ثابت است.

تعریف: گراف G را جهت پذیر گوییم هرگاه G را بتوان طوری جهت دهی کرد که گراف حاصل

همبند قوی باشد.

قضیه: اگر G همبند باشد آنگاه G جهت پذیر است اگر و تنها اگر بدون پل باشد.

فرض کنید G جهت پذیر باشد و $e=uv$ یک پل در G باشد. در این صورت با حذف e هیچ

مسیر جهت داری بین u و v نیست لذا بین u و v تنها یک مسیر جهت دار وجود دارد که با همبند قوی

بودن متناقض است. برعکس: فرض کنید G بدون پل باشد لذا G شامل یک دور است.

چون هر دور جهت پذیر است، G دارای زیرگرافی است که جهت پذیر است.

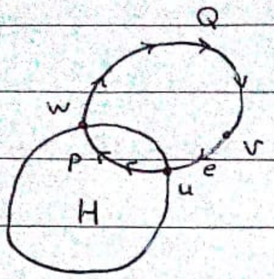
حال فرض کنید H زیرگراف جهت پذیر و ماکسیمال G باشد، باید نشان دهیم $H=G$.

فرض کنید $H \neq G$. (اگر $V(H)=V(G)$ حکم ثابت است) حال فرض کنید $V(G) \neq V(H)$.

چون G همبند است لذا $e=uv\in E(G)$ به طوری که $u\in H$ ، $v\notin H$. لذا دور C در G

شامل e وجود دارد چون e برش نیست. فرض کنید $C=ePQ$ ، $C: v - u \overset{P}{-} w \overset{Q}{-} v$

که w آخرین راسی است که در H است.



که H بین u و w مسیری جهت دار مانند P وجود دارد. حال e و Q

$P': u \to w$

را به صورت مقابل جهت دهی می‌کنیم: $Q: w - w_1 - w_2 - \dots - v$ جهت ww_1 از w به w_1 و همینطور

جهت $w_i w_{i+1}$ از w_i به w_{i+1} باشد و جهت e از v به u باشد. با این جهت دهی یک دور جهت‌دار

C' شامل e داریم. حال $H\cup C'$ زیرگراف G و هم‌بند قوی است که با ماکسیمال بودن H در تناقض

است لذا $H=G$.

مثال: اگر A ماتریس مجاورت G و $\bar{A}$ ماتریس مجاورت $\bar{G}$ باشد داریم $A+\bar{A}=B$ که B ماتریس

مجاورت گراف K_n است ($|V(G)|=n$).

حل: $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ $\bar{A}=[b_{ij}]_{n\times n}$

$A+\bar{A}=B=[c_{ij}]_{n\times n}$ $a_{ij}+b_{ij}=1$ $i\neq j$

Date: ۹۷/۱۰/۸ Subject:

$$\begin{cases} c_{ij} = 1 & i \neq j \\ c_{ij} = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

B ماتریس مجاورت K_n است.

مثال: اگر G، k-منتظم باشد و همبند، و $\lambda \neq k$ یک مقدار ویژه‌ی G باشد، آنگاه $-\lambda-1$ یک مقدار ویژه‌ی $\bar{G}$ است. (حل: تمرین)

مثال: اگر G، k-منتظم باشد و $\lambda \neq k$ یک مقدار ویژه‌ی G باشد، داریم $|\lambda| < |k|$. (حل: تمرین)